



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

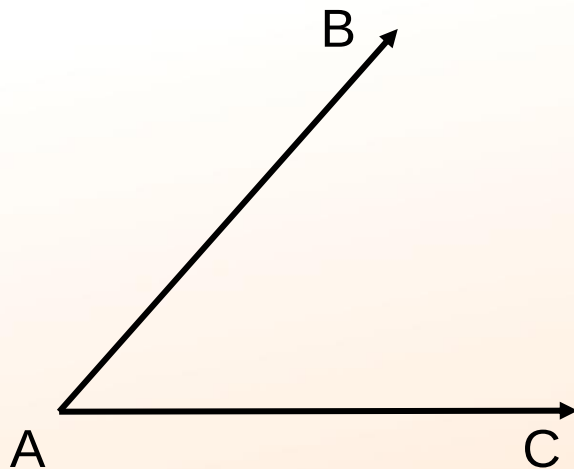
ÁNGULO

**CICLO
PRE
2024-1**



ÁNGULO

Definición.- Se denomina ángulo a la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo origen.



NOTACIÓN: $\angle BAC$

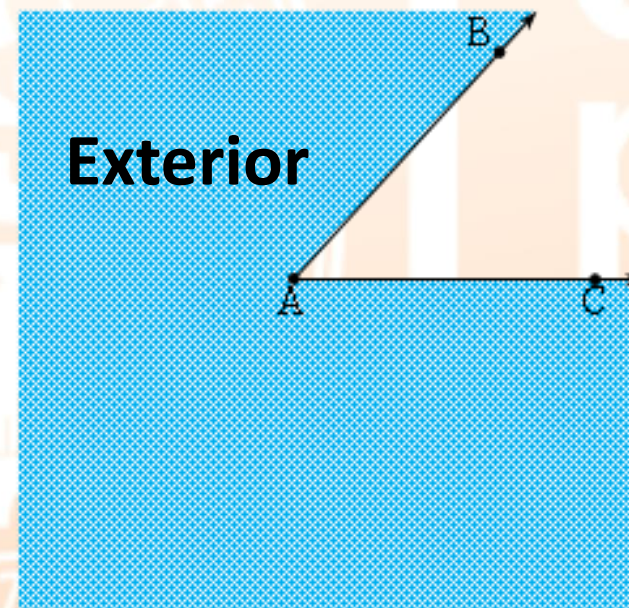
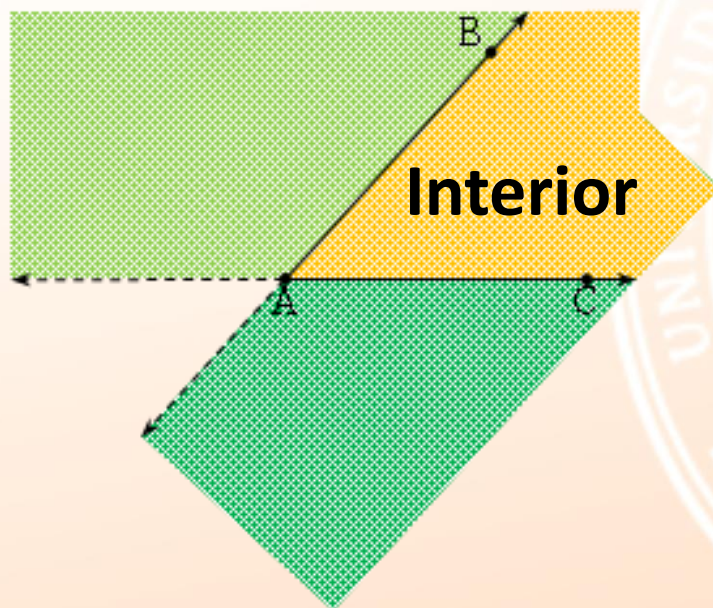
Se lee ángulo AOB

Vértice: A

Lados: $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

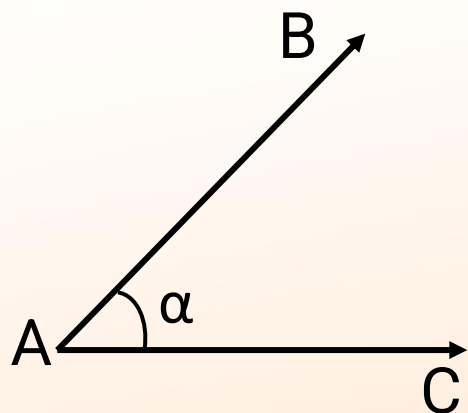
INTERIOR Y EXTERIOR DE UN ÁNGULO

El interior de un ángulo BAC, es la intersección del semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene al punto B, y el semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene al punto C. Los puntos del plano, que no pertenecen al ángulo, ni al interior, constituyen el exterior del ángulo.



POSTULADO DE LA MEDIDA DE UN ÁNGULO

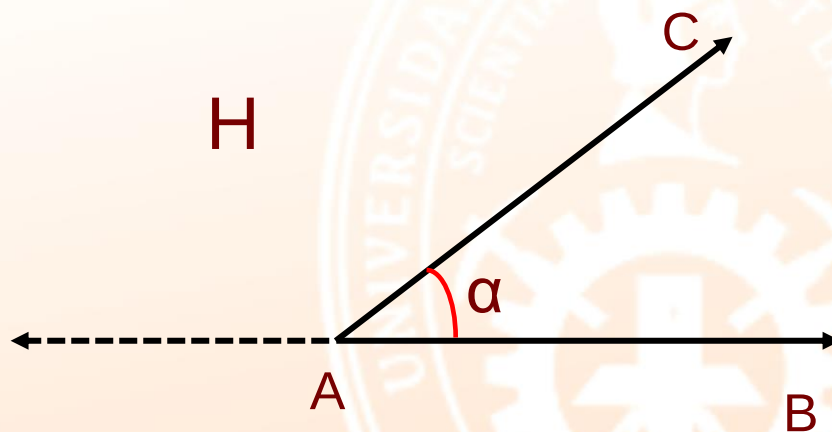
A cada ángulo BAC, le corresponde un único número real comprendido entre 0 y 180, denominado medida del ángulo y se denota $m\angle BAC$.



Sea α la medida del ángulo BAC y se denota: $m\angle BAC = \alpha$

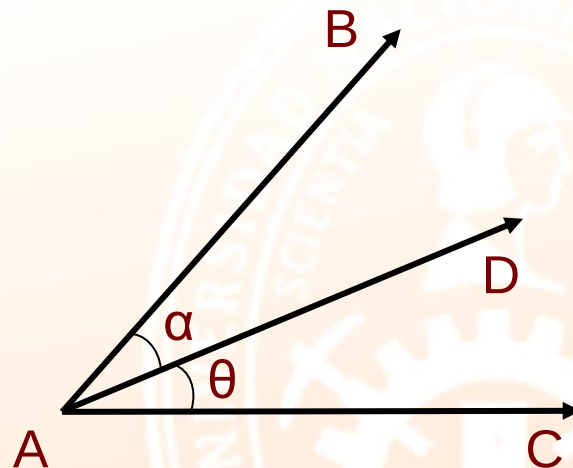
POSTULADO DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN ÁNGULO

Si $\overrightarrow{AB}$ es un rayo de la arista del semiplano H y α es un número real tal que $0 < \alpha < 180$, entonces existe un único rayo $\overrightarrow{AC}$ con $C \in H$, tal que $m\angle BAC = \alpha$



POSTULADO DE LA ADICIÓN DE ÁNGULOS

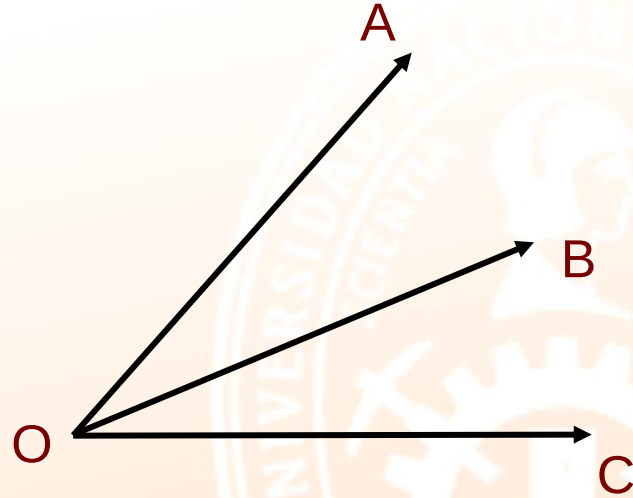
Si un punto D pertenece al interior de un ángulo BAC, entonces $m\angle BAD + m\angle DAC = m\angle BAC$



En la figura, si el punto D pertenece al interior del $\angle BAC$, entonces $m\angle BAC = \alpha + \theta$

ÁNGULOS ADYACENTES

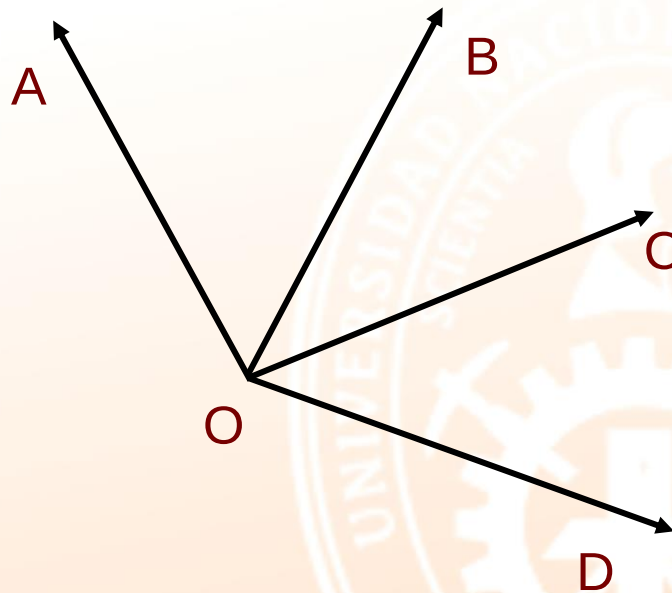
Definición.- Dos ángulos se denominan adyacentes, si tienen el vértice y un lado común, siendo los interiores de los ángulos conjuntos disjuntos.



Los ángulos AOB y BOC son adyacentes

NOTA

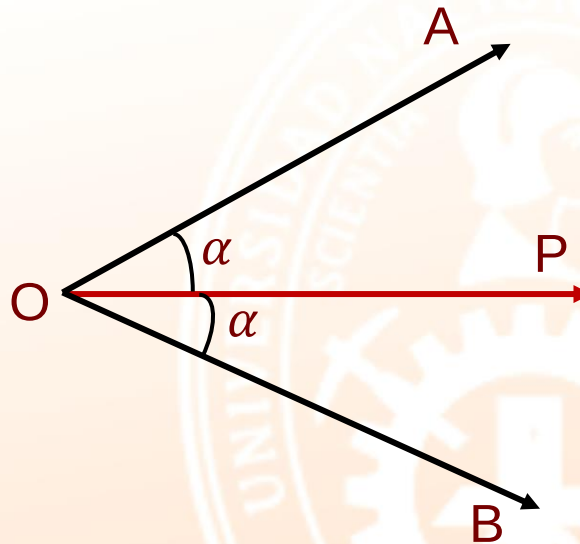
Tres o más ángulos se denominan consecutivos, si son adyacentes dos a dos.



Los ángulos AOB, BOC y COD son consecutivos

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

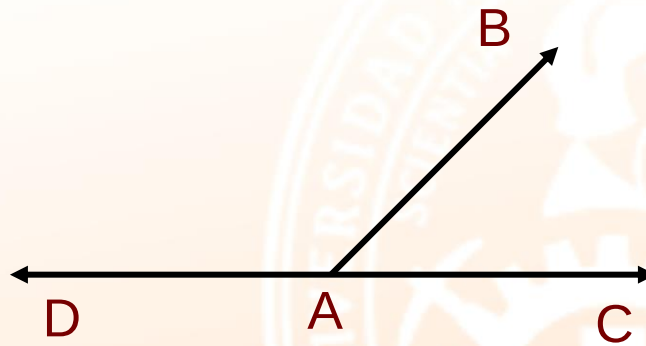
Definición.- Dado un ángulo AOB y P es un punto en el interior, el rayo OP se denomina bisectriz del ángulo AOB, cuando $m\angle AOP = m\angle POB$.



Si $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del ángulo AOB, entonces $m\angle AOP = m\angle POB$.

PAR LINEAL

Definición.- Dos ángulos forman un par lineal cuando son adyacentes y los lados no comunes son rayos opuestos.



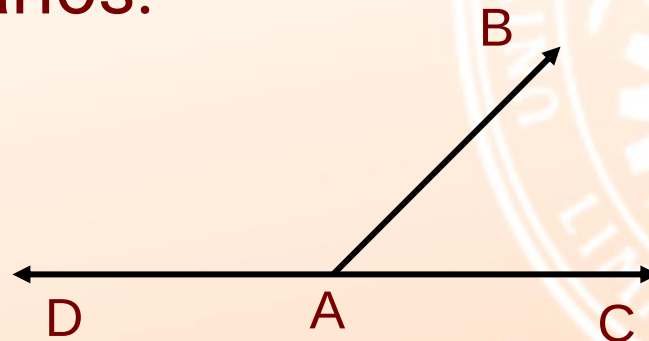
Los ángulos BAC y BAD forman un par lineal

DEFINICIONES:

- Dos ángulos, son suplementarios, cuando la suma de sus medidas es 180.
- Dos ángulos, son complementarios, cuando la suma de sus medidas es 90.

POSTULADO DEL SUPLEMENTO

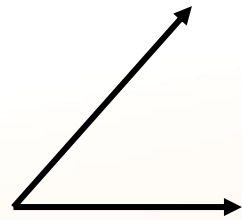
Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.



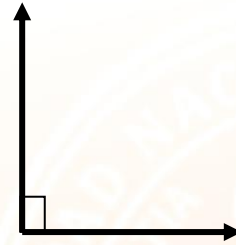
$$m\angle BAC + m\angle BAD = 180$$

CLASIFICACIÓN

Los ángulos se clasifican según las medidas en:



Ángulo agudo



Ángulo recto



Ángulo obtuso

- a.- Ángulo Agudo: mide entre 0 y 90.
- b.- Ángulo Recto: mide 90.
- c.- Ángulo Obtuso: mide entre 90 y 180.

RECTAS PARALELAS

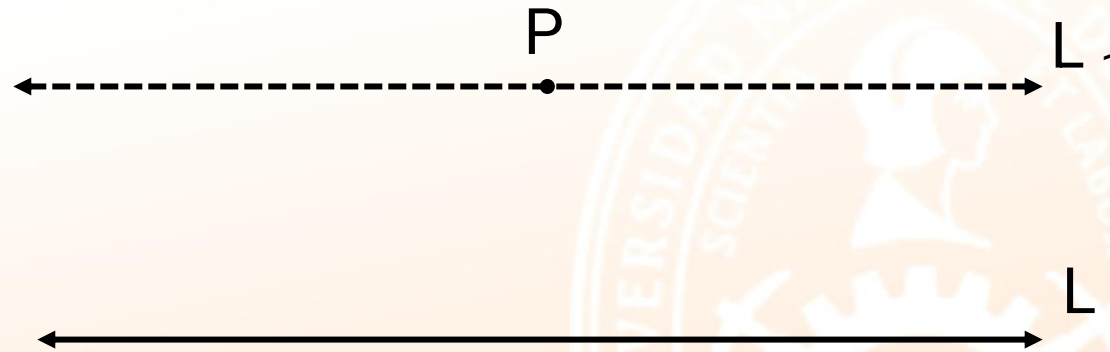
Son dos rectas contenidas en un mismo plano y que no tienen punto en común.



$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \Leftrightarrow L_1 // L_2$$

POSTULADO (QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES)

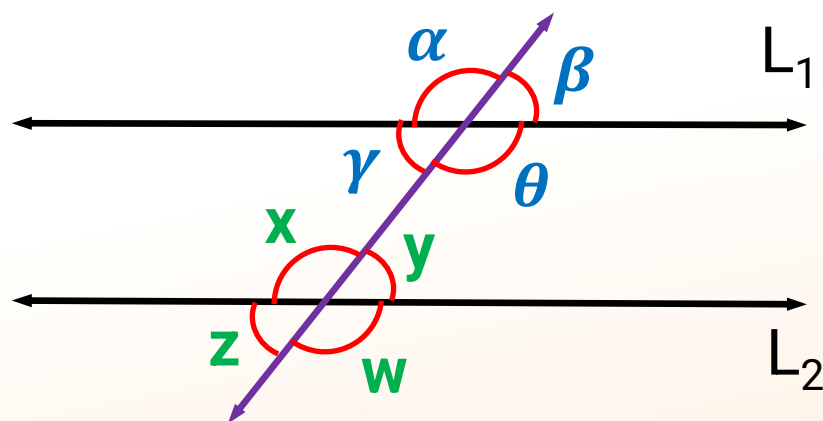
Si un punto es exterior a una recta dada, entonces existe solo una recta que contiene al punto y es paralela a la recta dada.



$$P \notin L \Rightarrow \exists L_1 / P \in L_1 \wedge L_1 \parallel L$$

ÁNGULOS DETERMINADOS EN DOS RECTAS PARALELAS Y UNA RECTA SECANTE

Si la rectas L_1 y L_2 son paralelas



Entonces

a) Ángulos correspondientes

$$\alpha = x \quad \beta = y \quad \gamma = z \quad \theta = w$$

b) Ángulos alternos

Internos $\gamma = y \quad \theta = x$

Externos $\alpha = w \quad \beta = z$

c) Ángulos conjugados

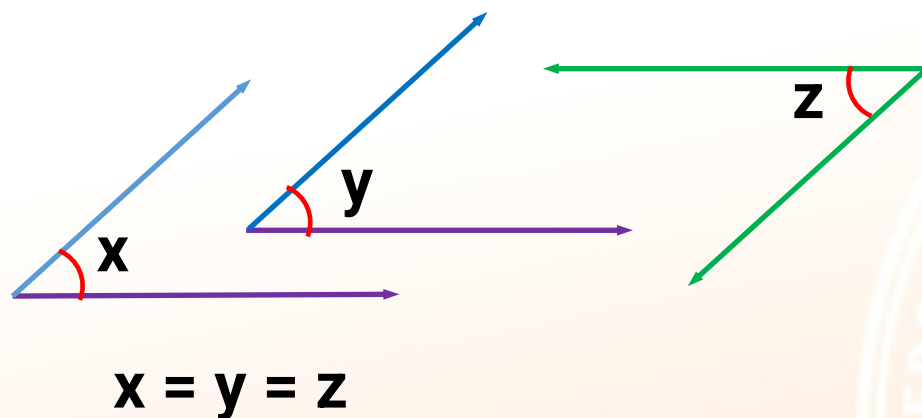
Internos $\gamma + x = 180$

Externos $\theta + y = 180$

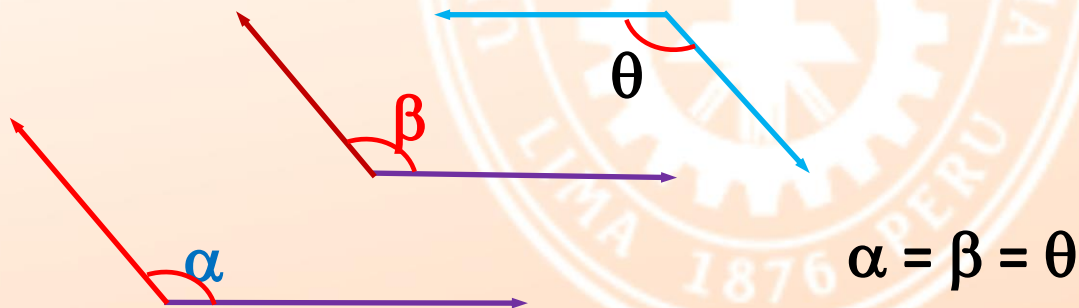
ÁNGULOS DE LADOS PARALELOS

TEOREMAS

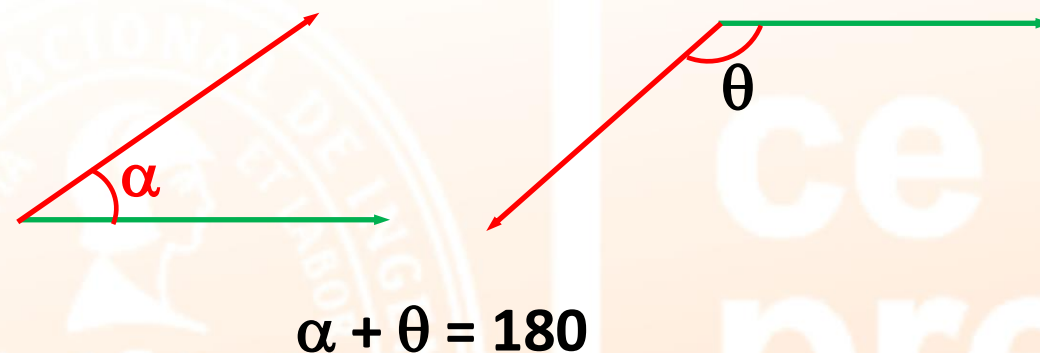
a) Ángulos agudos



b) Ángulos obtusos

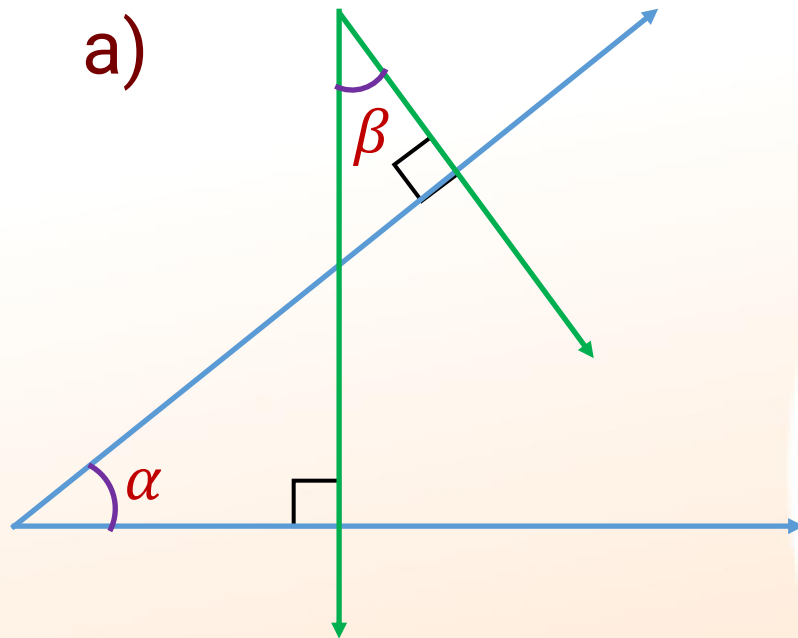


c) Ángulos agudo y obtuso

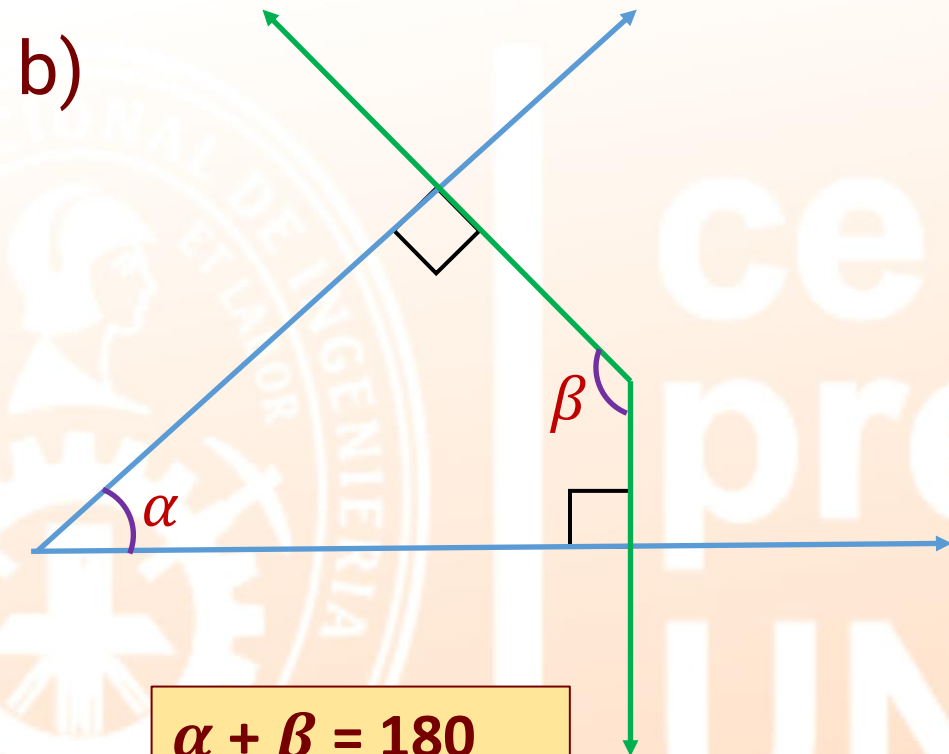


ÁNGULOS DE LADOS PERPENDICULARES

Los ángulos de lados perpendiculares son:



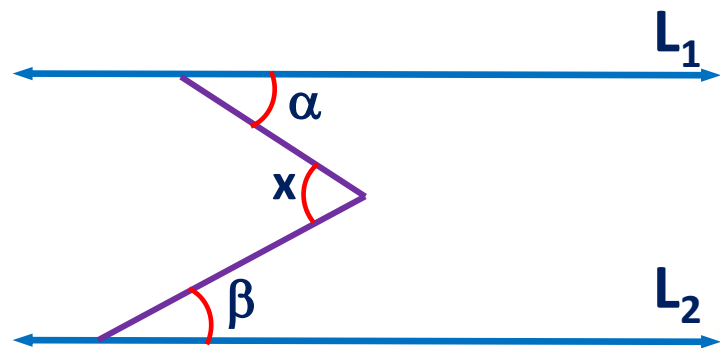
$$\alpha = \beta$$



$$\alpha + \beta = 180$$

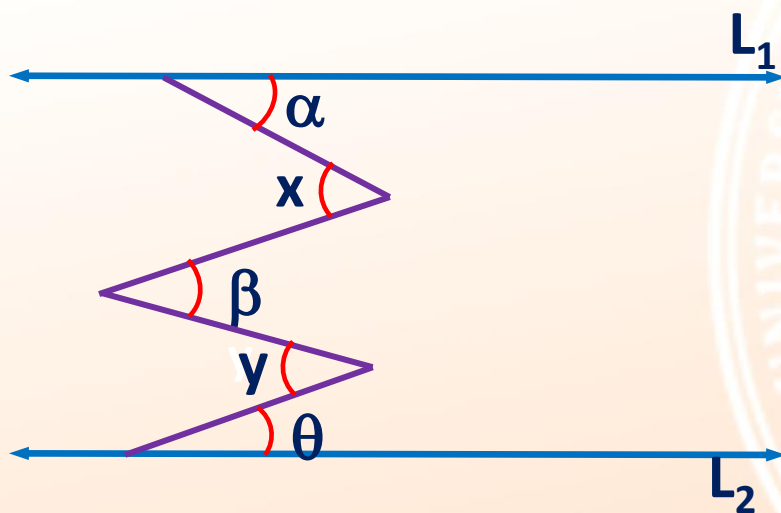
TEOREMAS ($L_1 \parallel L_2$)

1.



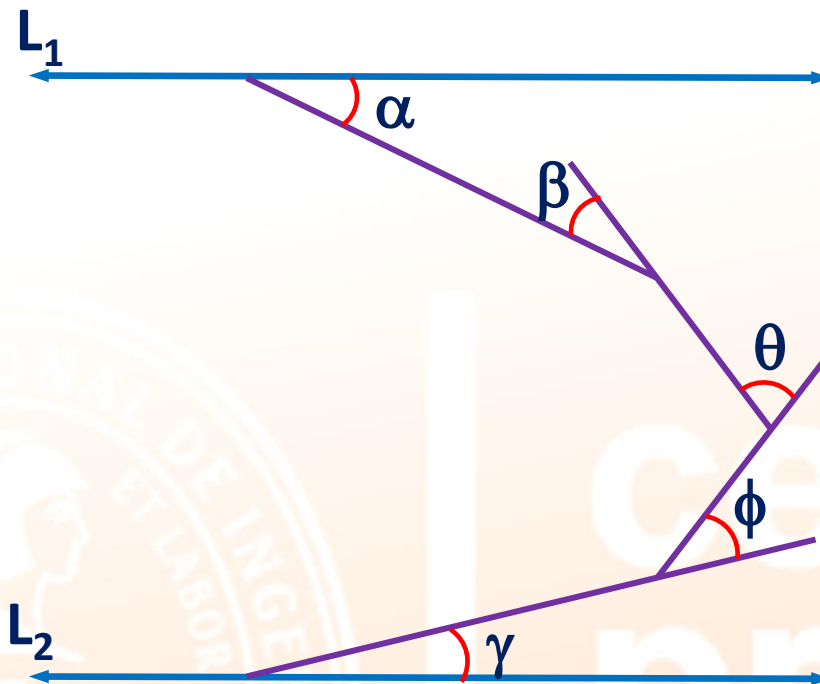
$$x = \alpha + \beta$$

2.



$$x + y = \alpha + \beta + \theta$$

3.



$$\alpha + \beta + \theta + \phi + \gamma = 180$$

EJERCICIO 01

Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. Dos ángulos congruentes, son complementarios.
- II. Tres ángulos cuyas medidas suman 180 son suplementarios.
- III. La medida de un ángulo pertenece al intervalo $\langle 0; 180 \rangle$.

A) FFF

B) VVV

C) FFV

D) VFF

E) VFV

RESOLUCIÓN 06

Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. Dos ángulos congruentes, son complementarios.
- II. Tres ángulos cuyas medidas suman 180 son suplementarios.
- III. La medida de un ángulo pertenece al intervalo $\langle 0; 180 \rangle$.

I. **FALSA**

Los ángulos pueden ser congruentes y no ser complementarios

II. **FALSA**

Los ángulos suplementarios son dos y no tres

III. **VERDADERA**

Postulado de la medida del ángulo

Clave: C

EJERCICIO 02

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si dos ángulos forman un par lineal, entonces sus respectivas medidas suman 180.
- II. Ángulo, es la unión de dos rayos que tienen un origen común.
- III. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios determinan un ángulo recto.

A) FFV
D) VFF

B) VFV
E) VVV

C) FVV

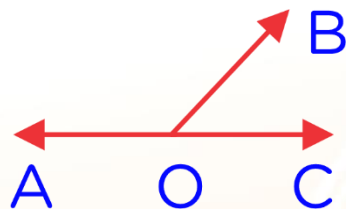
RESOLUCIÓN 07

Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si dos ángulos forman un par lineal, entonces sus respectivas medidas suman 180.
- II. Ángulo, es la unión de dos rayos que tienen un origen común.
- III. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios determinan un ángulo recto.

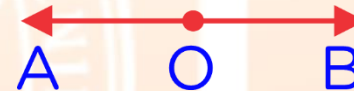
I. **VERDADERA**

Por definición.

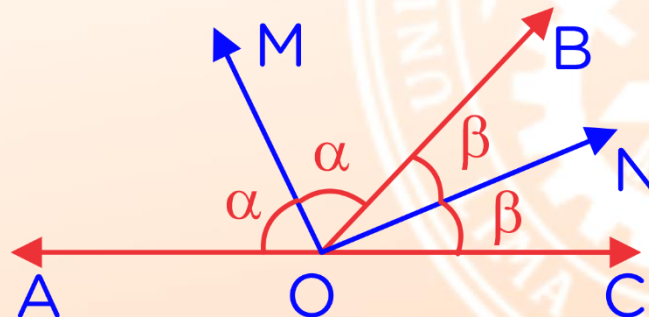


II. **FALSA**

Por definición, los lados son no colineales.



III. **VERDADERA**



Clave: B



ce
pre
UNI

MATERIAL DE ESTUDIO

Geometría

**EJERCICIOS
PROPUESTOS**

**CICLO
PRE
2024-1**



PROBLEMA ADICIONAL1

La suma de la medida de un ángulo con la tercera parte de su complemento es igual a 46. Determine el suplemento del complemento de la medida del ángulo.

- A) 104
- D) 134

- B) 114
- E) 144

- C) 124

RESOLUCION ADICIONAL 1

ADICIONAL 1

La suma de la medida de un ángulo con la tercera parte de su complemento es igual a 46. Determine el suplemento del complemento de la medida del ángulo

Sol: $\alpha \rightarrow$ MEDIDA DE ÁNGULO

$$\alpha + \frac{90 - \alpha}{3} = 46 \Rightarrow \frac{3\alpha + 90 - \alpha}{3} = 46 \Rightarrow 2\alpha + 90 = 138$$

$$\cdot \alpha + 45 = 69$$

$$\alpha = 24$$

$$X = SC_{\alpha} = 180 - (90 - 24) = \boxed{114} \text{ (B)}$$

PROBLEMA ADICIONAL 2

Si a la medida de un ángulo, se le resta dos grados más de la tercera parte de su complemento, resulta un cuarto del suplemento de dicho ángulo, disminuido en un grado. Calcule la medida del ángulo.

A) 38
D) 48

B) 42
E) 58

C) 44

ce
pre
UNI

RESOLUCION ADICIONAL 2

ADICIONAL 2:

$\alpha \rightarrow$ MEDIDA DEL ANGULO:

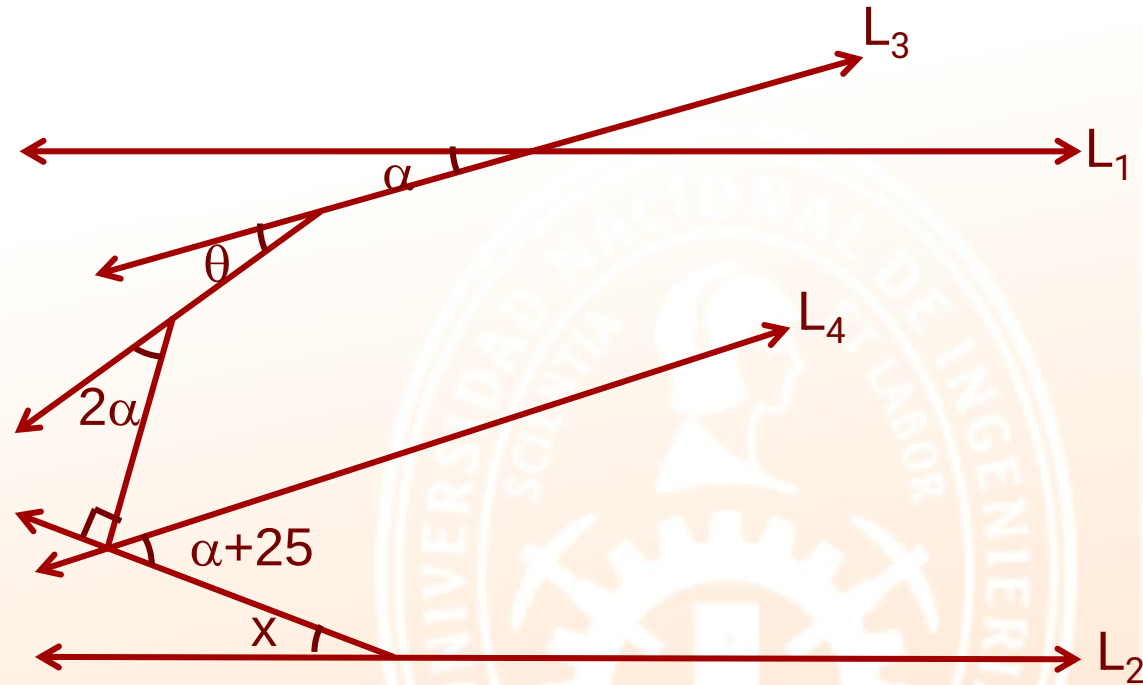
$$\alpha - \left[\frac{90 - \alpha}{3} + 2 \right] = \frac{180 - \alpha}{4} - 1 = \frac{3\alpha - (90 - \alpha + 6)}{3} = \frac{180 - \alpha - 4}{4}$$

$$4(4\alpha - 96) = 3(176 - \alpha)$$

$$\boxed{\alpha = 48} \text{ (D)}$$

PROBLEMA ADICIONAL 3

En la figura mostrada, las rectas $L_1 \parallel L_2$ y $L_3 \parallel L_4$. Calcule x



A) 25

B) 30

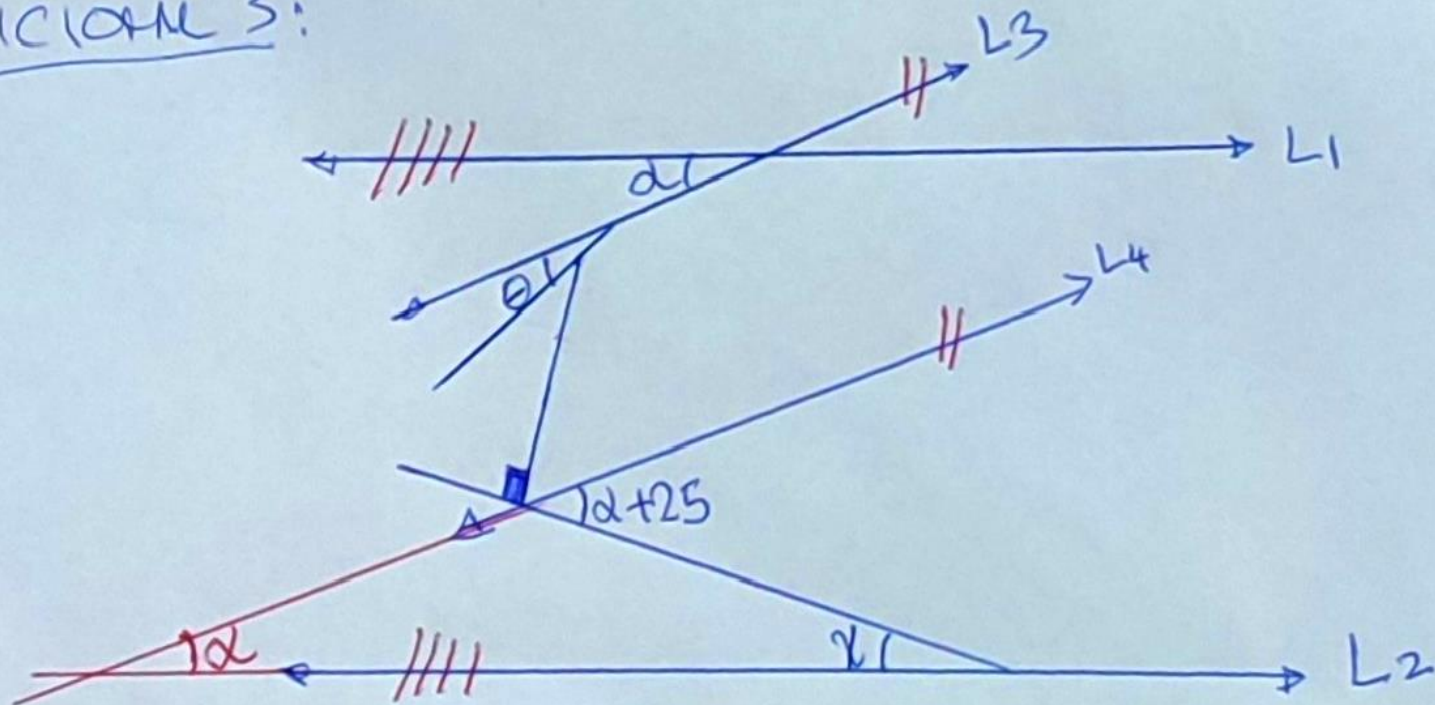
C) 42

D) 65

E) 80

RESOLUCION ADICIONAL 3

ADICIONAL 3:



$$\cancel{\alpha} + 25 = \cancel{\alpha} + \alpha$$

$$\boxed{25 = \alpha}$$



ce
pre
UNI

Geometría

GRACIAS

ce
pre
UNI